

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

## ETAPA LOCALĂ

### SUCEAVA

21 februarie 2016

#### CLASA a VIII-a

1. a) (3p) Demonstrați că:  $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2}$ , oricare ar fi  $n$  număr natural.  
b) (4p) Arătați că:  
$$(\sqrt{1 \cdot 2} - 1)(\sqrt{2 \cdot 3} - 2)(\sqrt{3 \cdot 4} - 3) \dots (\sqrt{2015 \cdot 2016} - 2015) < \frac{1}{2^{2015}}.$$
2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $x^2 + 2[x] \cdot \{x\} = 3(3 - \{x\}^2)$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a lui  $x$ , iar  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a lui  $x$ .
3. Fie punctele necoplanare  $A, B, C, D$  astfel încât  $AC=AD=BC=BD$ ,  $E$  mijlocul lui  $(AB)$ , iar  $F$  mijlocul lui  $(CD)$ .
  - a) (2p) Aflați măsura unghiului dintre dreptele  $AB$  și  $CD$ ;
  - b) (2p) Dacă  $AA' \perp (BCD)$ , demonstrați că punctele  $B, A', F$  sunt coliniare;
  - c) (3p) Dacă  $G$  este piciorul perpendicularei din  $A$  pe bisectoarea  $\sphericalangle ACD$ , demonstrați că  $EG$  este paralelă cu planul  $(BCD)$ .
4. Fie piramida patrulateră regulată  $VABCD$ ,  $\{O\} = AC \cap BD$  și  $P, Q \in (VO)$ . Dacă  $\{E\} = AP \cap CV$ ,  $\{F\} = CP \cap AV$ ,  $\{S\} = BQ \cap DV$  și  $\{T\} = DQ \cap BV$ , arătați că măsura unghiului dintre dreptele  $EF$  și  $ST$  nu depinde de alegerea punctelor  $P$  și  $Q$  pe segmentul  $(VO)$ .

**Notă:** 1. Toate subiectele sunt obligatorii.  
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.  
3. Timp de lucru 3 ore.